

Epreuve 1 : *PSI*

Session 2003

CORRIGÉ

1^{ère} Partie

1. Pour cela il faut montrer que Φ est linéaire, ce qui simple en vérifiant l'égalité $\Phi(P + \lambda Q) = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \quad \forall (P, Q) \in E^2; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ et que $\Phi(P) \in E_n \quad \forall P \in E_n$, en effet : soit $P \in E_n$ donc $\deg P \leq n$ donc $\deg(\Phi(P)) = \deg(((X^2 - 1)P)') = \deg(((X^2 - 1)P)) - 1 = 2 + \deg P - 1 = \deg P \leq n$, donc $\Phi(P) \in E_n$ et donc Φ induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. Ecrire la matrice de $\Phi_n(1) = 0, \Phi_n(X) = 2X, \dots, \Phi_n(X^k) = ((X^2 - 1)kX^{k-1})' = k(X^{k+1} - X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}, \dots, \Phi_n(X^n) = n(n+1)X^n - n(n-1)X^{n-2}$. Donc

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & (k-1)k & \ddots \\ & & \ddots & k(k+1) & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & (n-1)n \\ & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $\Phi_n \Leftrightarrow M - \lambda I_n$ non inversible, or $M - \lambda I_n$ est une matrice triangulaire, donc serait non inversible si l'un des ses termes diagonaux $(\lambda - k(k+1))_{0 \leq k \leq n}$ est nul, c'est à dire $\lambda \in \{0, 2, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)\}$, Ainsi Φ_n est un endomorphisme de E_n qui admet $n+1 = \dim E_n$ valeurs propres distinctes donc diagonalisable.
4. (a) $\mu_k = k(k+1)$, Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in E_n$ polynôme, en notant $Y = (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ l'équation $\Phi_n(P) = \mu_k P$ s'écrit matriciellement $MY = \mu_k Y$ ou bien $Y \in \text{Ker}(M - \mu_k I_n)$, or $M - \mu_k I_n$ est une matrice triangulaire supérieure dont un seul terme est nul, donc de rang égal à $n-1$ et par suite $\dim \text{Ker}(M - \mu_k I_n) = 1$, on peut donc conclure que les solutions de l'équation $\Phi_n(P) = \mu_k P$ sont tous proportionnels, et parmi ces solution il n'y a bien sûr qu'un seul un unique polynôme unitaire P_k tel que : $\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k$.
- (b) Posons $\deg P_k = p$, donc $P_k(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ avec $a_p \neq 0$, $\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k \implies (X^2 - 1)P_k'' + 2XP_k' = \mu_k P_k$, en identifiant dans cette égalité les coefficient de la plus grande puissance qui est X^p on trouve $a_p(p(p-1) + 2p) = a_p \mu_k$ qui devient puisque $a_p \neq 0$, $p(p+1) = k(k+1)$ ou bien $k^2 - p^2 = p - k$. Si $p \neq k$ cette égalité devient après simplification par $p - k$, $k + p = -1$ ce qui est impossible, donc $\deg P_k = p = k$.
5. La symétrie, bilinéarité et positivité ne posent aucun problème. Juste la notion de définie qui mérite un peu de rédaction, soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$ donc $\int_{-1}^1 P^2(t)dt = 0$, ainsi P^2 est

une fonction continue positive d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$ donc $P^2 = 0$ et aussi $P = 0$ sur $[-1, 1]$, on a donc un polynôme P qui admet une infinité de racines donc $P = 0$.

6. Pour tout $(P, Q) \in E^2$ on a : $(\Phi(P)|Q) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P'(t))' Q(t) dt = [(t^2 - 1)P'(t)Q(t)]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt = 0 - \left([P(t)(t^2 - 1)Q'(t)]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^1 P(t) ((t^2 - 1)Q'(t))' dt \right) = (P|\Phi(Q))$,
on a procédé à deux reprises par une intégration par parties.

7. Pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(\Phi(P_k)|P_{k'}) = (P_k|\Phi(P_{k'})) \implies \mu_k(P_k|P_{k'}) = \mu_{k'}(P_k|P_{k'}) \implies (\mu_k - \mu_{k'})(P_k|P_{k'}) \implies (P_k|P_{k'}) = 0$, car $k \neq k' \implies \mu_k = k(k+1) \neq \mu_{k'} = k'(k'+1)$.

8. (a) D'après la question précédente la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est orthogonale, en plus tous ses éléments sont des polynômes non nuls car unitaires, donc c'est une famille libre, et elle est de cardinal $n + 1 = \dim E_n$ donc c'est une base de E_n , pour en construire une base orthonormée (R_0, R_1, \dots, R_n) , comme la famille est déjà orthogonale il suffit de normaliser ses éléments en le divisant par sa norme, c'est à dire prendre $R_k = \frac{P_k}{\|P_k\|}$.

(b) Soit $P \in E_n, \|P\| = 1$, donc $P = \sum_{k=0}^n a_k R_k$ avec $\sum_{k=0}^n a_k^2 = 1$ car (R_0, R_1, \dots, R_n) est une

b.o.n de E_n , d'autre part $\forall 0 \leq k \leq n$ on a :

$$\Phi_n(R_k) = \Phi_n\left(\frac{P_k}{\|P_k\|}\right) = \frac{\Phi_n(P_k)}{\|P_k\|} = \frac{\mu_k P_k}{\|P_k\|} = \mu_k R_k, \text{ ainsi}$$

$$\Phi_n(P) = \Phi_n\left(\sum_{k=0}^n a_k R_k\right) = \sum_{k=0}^n a_k \Phi_n(R_k) = \sum_{k=0}^n a_k \mu_k (R_k), \text{ comme } (R_0, R_1, \dots, R_n) \text{ est}$$

une b.o.n de E_n alors $\|\Phi_n(P)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2 \mu_k^2} \leq \mu_n \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} = \mu_n$ donc

$$\|\|\Phi_n\|\| = \sup \{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\} \leq \mu_n.$$

Inversement : $\|R_n\| = 1$ donc $\|\Phi_n(R_n)\| = \mu_n \leq \|\|\Phi_n\|\| = \sup \{\|\Phi_n(P)\|; P \in E_n, \|P\| = 1\}$
d'où l'égalité .

2^{ème} Partie

1. (a) $L_k = \frac{1}{2^k k!} U_k = \frac{1}{2^k k!} V_{k,k} = \frac{1}{2^k k!} [(X^2 - 1)^k]^{(k)}$, donc $\deg L_k = \deg([(X^2 - 1)^k]^{(k)}) = \deg(X^2 - 1)^k - k = 2k - k = k$, le coefficient dominant de L_k est obtenu en dérivant k fois la plus grande puissance de $(X^2 - 1)^k$ qui est X^{2k} , or $(X^{2k})^{(k)} = (2k)(2k-1) \dots (k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!} X^k$, donc le coefficient dominant de L_k est $\frac{1}{2^k k!} \frac{(2k)!}{k!} = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ $((X^2 - 1)^k)^{(k)} = ((X - 1)^k (X + 1)^k)^{(k)} = \sum_{p=0}^k C_k^p ((X - 1)^k)^{(p)} ((X + 1)^k)^{(k-p)}$ (*), or 1 est une racine de $(X - 1)^k$ de multiplicité

k donc $((X - 1)^k)^{(p)}(X = 1) = 0$ pour tout $0 \leq p \leq k - 1$, donc en remplaçant dans (*)

$$X \text{ par } 1, \text{ on trouve } L_k(1) = \frac{1}{2^k k!} C_k^k ((X - 1)^k)^{(k)}(X = 1) ((X + 1)^k)^{(0)}(X = 1) = 1.$$

(c) Du fait que la dérivée d'un polynôme pair est impair et comme $(X^2 - 1)^k$ est pair, alors sa dérivée k -ème est impaire si k impair, et elle est paire si k est pair, on peut donc conclure que la parité du polynôme L_k est la même que celle de k .

(d) $L_k(-1) = L_k(1)$ si k pair et $L_k(-1) = -L_k(1)$ si k impair .

2. (a) $V_{p,q} = ((X^2 - 1)^p)^{(q)}$, or 1 et -1 sont des racine de $(X^2 - 1)^p$ de multiplicité p , donc pour $q < p$ alors $((X^2 - 1)^p)^{(q)}(1) = V_{p,q}(1)$ et de même $V_{p,q}(-1) = 0$.
- (b) Si $q > 2p$, on est dans la situation où l'ordre de la dérivée dépasse le degré donc $V_{p,q} = 0$.
- (c) En effectuant la première intégration par partie on a que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \neq q$ en supposant par exemple $p > q$; $(U_p|U_q) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p)} ((t^2 - 1)^q)^{(q)} dt =$

$$\left[((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} ((t^2 - 1)^q)^{(q)} \right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} ((t^2 - 1)^q)^{(q+1)} dt$$

$$= 0 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} ((t^2 - 1)^q)^{(q+1)} dt = - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)} ((t^2 - 1)^q)^{(q+1)} dt$$
car $((t^2 - 1)^p)^{(p-1)}(t=1) = ((t^2 - 1)^p)^{(p-1)}(t=-1) = 0$.
En effectuant une deuxième intégration par partie on aura
 $(U_p|U_q) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(p-2)} ((t^2 - 1)^q)^{(q+2)} dt$, et ainsi de suite jusqu'à avoir $(U_p|U_q) =$
 $(-1)^p \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^p)^{(0)} ((t^2 - 1)^q)^{(q+p)} dt = 0$ car $((t^2 - 1)^q)^{(q+p)} = 0$ puisque l'ordre de dérivée qui est ici $q + p$ dépasse le degré qui est ici $2q$, notez bien qu'on a supposé au départ $p > q$, le raisonnement sera pareil si l'on suppose $q > p$.

3. On déduit de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille (U_0, U_1, \dots, U_k) est une famille orthogonale donc la famille (L_0, L_1, \dots, L_k) est une famille orthogonale or $\forall 0 \leq p \leq k$; $\deg L_p = p \leq k$, donc c'est une famille orthogonale de E_k , tous ses éléments sont non nuls donc est libre et comme son cardinal est $k + 1 = \dim E_k$ alors c'est une base orthogonale de E_k .

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$, on a : $(XL_n|L_k) = \int_{-1}^1 t L_n(t) L_k(t) dt =$

$$\frac{1}{2^n n! 2^k k!} \int_{-1}^1 t ((t^2 - 1)^n)^{(n)} ((t^2 - 1)^k)^{(k)}(t) dt$$

$$= \frac{1}{2^n n! 2^k k!} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^n)^{(n)} t ((t^2 - 1)^k)^{(k)}(t) dt = (L_n|XL_k).$$
Or L_n est orthogonal à tous les $(L_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ qui forment une base de E_{n-1} donc sera orthogonal à tout élément de XL_k qui est un polynôme de degré $k + 1 \leq n - 1$, d'où $(XL_n|L_k) = 0$.

- (b) D'après les questions précédentes L_{n+1}, L_n, L_{n-1} est une base de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1} , et d'après la question précédente XL_n est un élément de E_{n+1} orthogonal à tous les $(L_k)_{0 \leq k \leq n-2}$ qui forment une base de E_{n-2} , donc XL_n est un élément de l'orthogonal de E_{n-2} dans E_{n+1} et va alors s'écrire comme combinaison linéaire de L_{n+1}, L_n, L_{n-1} .

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XL_n = aL_{n+1} + bL_n + cL_{n-1}$, d'autre part $\deg L_k = k$ donc $a \neq 0$ et alors $L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}$ avec $(\alpha_n = \frac{1}{a}, \beta_n = -\frac{b}{a}, \gamma_n = -\frac{c}{a}) \in \mathbb{R}^3$

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (X^2 - 1)W'_n = (X^2 - 1)(X^2 - 1)^{n'} = (X^2 - 1)2nX(X^2 - 1)^{n-1} = 2nXW_n$.
- (b) En dérivant $(n + 1)$ -fois l'expression précédente, on obtient après avoir utilisé la formule de Leibniz : $((X^2 - 1)W'_n)^{n+1} = 2n(XW_n)^{n+1}$ qui devient

$$\sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p (X^2 - 1)^{(p)} (W'_n)^{(n+1-p)} = 2n \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p X^{(p)} W_n^{(n+1-p)}$$
, or $(X^2 - 1)^{(p)} = 0$ pour $p \geq 3$ et $X^{(p)} = 0$ pour $p \geq 2$, on obtient donc

$$W_n^{(n+2)} + (n + 1)2XW_n^{(n+1)} + n(n + 1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n+1)} + 2n(n + 1)W_n^{(n)}$$
 ou bien

$\Phi_n(W_n) = (X^2 - 1)W_n^{(n)''} + (n+1)2XW_n^{(n)'} + n(n+1)W_n^{(n)} = 2nXW_n^{(n)'} + 2n(n+1)W_n^{(n)}$,
ou encore $\Phi_n(W_n) = (X^2 - 1)W_n^{(n)''} + 2XW_n^{(n)'} = n(n+1)W_n^{(n)}$ or par définition
 $W_n^{(n)} = n!2^n L_n$ et comme Φ_n est linéaire alors : $\Phi_n(L_n) = n(n+1)L_n$.

(c) D'après la question 4.a il existe un unique polynôme unitaire P_n tel que :

$\Phi_n(P_n) = n(n+1)P_n$, et d'après la question précédente $\frac{L_n}{\text{co}(L_n)}$ est aussi un polynôme

unitaire tel que : $\Phi_n\left(\frac{L_n}{\text{co}(L_n)}\right) = n(n+1)\frac{L_n}{\text{co}(L_n)}$, donc $P_n = \frac{L_n}{\text{co}(L_n)}$ et on peut en

conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, avec $a_n = \text{co}(L_n)$, or
 $L_n = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$, donc :

$$a_n = \text{co}(L_n) = \frac{1}{2^n n!} \times \text{coefficient de } (X^{2n})^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

6. (a) $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $(X|L_k L'_k) = \int_{-1}^1 t L_k(t) L'_k(t) dt = \frac{1}{2} [t L_k^2(t)]_{t=-1}^{t=1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_k^2(t) dt$

$$= 1 - \frac{1}{2} \|L_k\|^2 \text{ car } L_k(1) = 1, L_k(-1) = \mp 1.$$

(b) Soit $k \geq 1$, $\deg L_k = k$, posons $L_k = a_k X^k + \dots + a_0$ alors $X L'_k = k a_k X^k + \dots + a_1 X$, $k L_k = k a_k X^k + \dots + k a_0$, en faisant la différence on obtient que : $X L'_k - k L_k$ est un polynôme de degré $\leq k-1$, c'est à dire $X L'_k - k L_k \in E_{k-1}$.

D'autre part L_k est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq k-1$, en particulier à $X L'_k - k L_k$, donc $(X L'_k - k L_k | L_k) = 0$ ou bien $(X L'_k | L_k) = k(L_k | L_k) = k \|L_k\|^2$, mais ceci pour $k \geq 1$, pour $k = 0$ l'égalité est triviale puisque L_0 est un polynôme constant.

Donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X L'_k | L_k) = k \|L_k\|^2$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\|L_k\|^2 = \frac{1}{k} (X L'_k | L_k) = \frac{1}{k} \int_{-1}^1 t L'_k(t) L_k(t) dt = \frac{1}{k} \int_{-1}^1 t L_k(t) L'_k(t) dt = \frac{1}{k} (X | L_k L'_k) = \frac{1}{k} (1 - \frac{1}{2} \|L_k\|^2)$, ce qui donne $(2k+1) \|L_k\|^2 = 2$, d'où $\|L_k\|^2 = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$.

(d) D'après la question 5.5. L_k est un polynôme de degré k de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$, donc $(k+1)L_{k+1} = (k+1) \frac{(2k+2)!}{2^{k+1} (k+1)!^2} X^{k+1} + \dots + \alpha_0 = (k+1) 2(k+1) \frac{(2k+1)!}{2^{k+1} (k+1)!^2} X^{k+1} + \dots + \alpha_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} X^{k+1} + \dots + \alpha_0$ et $(2k+1)X L_k = (2k+1) \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} X^{k+1} + \dots + \beta_0 = \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} X^{k+1} + \dots + \beta_0$, en faisant la différence on a bien $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)X L_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, d'autre part d'après la question 4.a $X L_k$ est orthogonal à E_{k-2} , et L_{k+1} aussi, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)L_{k+1} - (2k+1)X L_k$ est un polynôme de degré $\leq k$, orthogonal à E_{k-2} , et par suite s'écrit sous la forme :

$$(k+1)L_{k+1} - (2k+1)X L_k = \alpha L_{k-1} + \beta L_k \text{ avec } \alpha = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)X L_k | L_{k-1})}{\|L_{k-1}\|^2} = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2} (X L_k | L_{k-1}) = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k) t L_{k-1}(t) dt, \text{ moyennant des intégration par parties successives où tout les crochets sont nul puisque } [((t^2 - 1)^k)^{(p)}]_{t=-1}^{t=1} = 0 \quad \forall p < k$$

$$\text{vu que } -1 \text{ et } 1 \text{ sont des racines de } (t^2 - 1)^k \text{ de multiplicité } k \text{ on a : } \alpha = -\frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2} (-1)^k \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k (t L_{k-1})^{(k)} dt. \text{ Or } t L_{k-1} \text{ est un polynôme de degré } k \text{ donc } (t L_{k-1})^{(k)} = k! \text{co}(t L_{k-1}) = k! \text{co}(L_{k-1}) = k! \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}, \text{ donc } \alpha = \frac{(2k+1)}{\|L_{k-1}\|^2} (-1)^{k+1} k! \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k dt$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{2^{k-1} k! (2k-1)!} I_k \text{ où } I_k = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k dt, \text{ dit intégrale de Wallis, on montre par récurrence que : } (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{2^{k-1} k! (2k-1)!} I_k = (2k+1).$$

De même $\beta = \frac{((k+1)L_{k+1} - (2k+1)X L_k | L_k)}{\|L_k\|^2} = -\frac{(2k+1)X L_k | L_k}{\|L_k\|^2} = -\frac{1}{\|L_k\|^2} \int_{-1}^1 t L_k^2(t) dt = 0$ car la fonction $t \mapsto t L_k^2(t)$ est impaire sur $[-1, 1]$ donc son intégrale est nulle, donc on conclut que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+1)L_{k+1} = (2k+1)X L_k - k L_{k-1}$.

1. (a) Pour tout $Q \in E_n$, $Q_n(t)Q(t)$ est un polynôme de degré inférieur à $2n + 1$ car $\deg Q \leq n$; $\deg Q_n = n + 1$, or la méthode est d'ordre $2n + 1$ donc $\mathcal{E}(QQ_n) = 0$ c'est à dire :

$$\int_{-1}^1 Q_n(t)Q(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i Q_n(x_i)Q(x_i) = 0$$

car les x_i sont des racines de Q_n .

(b) D'après la question précédente $\frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ est un polynôme de degré $n + 1$ orthogonal à E_n , or l'orthogonal de E_n dans E_{n+1} est de dimension 1, et R_{n+1} est aussi un polynôme de degré $n + 1$ orthogonal à E_n , donc $\frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ et R_{n+1} sont proportionnels, comme ils sont unitaires les deux alors $\frac{Q_n}{\|Q_n\|} = \pm R_{n+1}$.

On peut alors dire de x_0, x_1, \dots, x_n sont les racines de R_{n+1} .

(c) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$, \mathcal{L}_k est un polynôme de degré inférieur à n , or la méthode est d'ordre $2n + 1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}_k) = 0$ c'est à dire :

$$\int_{-1}^1 \mathcal{L}_k dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathcal{L}_k(x_i) = \lambda_k,$$

car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.

En effet $Q_n(X) = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$, donc $Q'_n(X) = \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} (X - x_j)$, d'où

$$Q'_n(x_k) = \prod_{j \neq k} (x_k - x_j) = \left(\frac{Q_n(X)}{X - x_k} \right) (X = x_k), \text{ d'où } \mathcal{L}_k(x_k) = 1. \text{ Ainsi } \lambda_k = \int_{-1}^1 \mathcal{L}_k(t) dt.$$

Rappel : Si f_0, f_1, \dots, f_n sont des fonctions dérivables alors $\prod_{i=0}^n f_i$ est aussi dérivable,

$$\text{avec : } \left(\prod_{i=0}^n f_i \right)' = \sum_{i=0}^n f_i' \prod_{j \neq i} f_j.$$

(d) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$, \mathcal{L}_k^2 est un polynôme de degré inférieur à $2n$, or la méthode est d'ordre $2n + 1$ donc $\mathcal{E}(\mathcal{L}_k^2) = 0$ c'est à dire :

$$\int_{-1}^1 \mathcal{L}_k^2 dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathcal{L}_k^2(x_i) = \lambda_k,$$

car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$.

2. (a) Pour tout $Q \in E_n$, posons $P = Q - \sum_{i=0}^n Q(x_i)\mathcal{L}_i$, on a : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$P(x_k) = Q(x_k) - \sum_{i=0}^n Q(x_i)\mathcal{L}_i(x_k) = 0$ car $\mathcal{L}_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $\mathcal{L}_k(x_k) = 1$, ainsi P est alors un polynôme de degré inférieur à n qui admet $n + 1$ racines distinctes, donc nul, d'où $Q = \sum_{i=0}^n Q(x_i)\mathcal{L}_i$.

(b) Pour tout $Q \in E_n$, $\int_{-1}^1 Q(t)dt = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n Q(x_i)\mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^n Q(x_i) \int_{-1}^1 \mathcal{L}_i(t)dt = \sum_{i=0}^n Q(x_i)\lambda_i$, donc $\mathcal{E}(Q) = 0$, d'où la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leq n$.

(c) - x_0, x_1, \dots, x_n sont les $n + 1$ racines distinctes de Q_n et R_{n+1} , tous deux polynômes de degré $n + 1$, donc sont proportionnels, (utiliser la décomposition en facteur irréductible d'un polynôme).

Or R_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à n , donc Q_n aussi, d'où $\int_{-1}^1 Q_n(t)Q(t)dt = 0$.

- On a donc $\int_{-1}^1 P(t)dt = \int_{-1}^1 Q_n(t)Q(t)dt + \int_{-1}^1 R(t)dt = \int_{-1}^1 R(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i R(x_i)$,
parce que R est un polynôme de degré inférieur à n , et la méthode est exacte
pour les polynômes de degré $\leq n$, or $P(x_i) = Q_n(x_i)Q(x_i) + R(x_i) = R(x_i)$,
donc $\int_{-1}^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$, d'où $\mathcal{E}(P) = 0$.

(d) Conclusion directe de la question précédente.

FIN DE L'ÉPREUVE

FIN

© : www.chez.com/myismail

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc